ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des
Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE 1991

Epreuve de Mathématiques 1
Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

Notations

On appelle matrice tridiagonale symétrique réelle d'ordre n une matrice A de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ c_1 & a_2 & c_2 & & \\ 0 & c_{i-1} & a_i & c_i & \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

pour i tel que $1 \le i \le n$ a_i élément de R
pour i tel que $1 \le i \le n-1$ c_i élément de R*

On note pour $1 \le k \le n$

$A^{(k)}$ la sous matrice $A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ c_1 & a_2 & c_2 & & \\ 0 & c_{k-1} & a_k & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0 & c_{k-1} & a_k \end{bmatrix}$

- I_k la matrice unité d'ordre k.
- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de A
- $P_k(\lambda) = \det(A^{(k)} - \lambda I_k)$ le polynôme caractéristique de $A^{(k)}$
- ${}^tM$ la transposée de M.

La partie II peut être abordée en admettant le résultat de I.

La partie III est indépendante des parties I et II.

I

.Soit A une matrice tridiagonale symétrique réelle d'ordre n régulière c'est à dire matrice carrée inversible. On se propose de factoriser A sous la forme $A = L D {}^tL$ où D est une matrice diagonale d'ordre n et L une matrice bidiagonale d'ordre n.

On pose

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & \\ & & d_i & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Remarque importante : les éléments de la diagonale principale de L sont des " chiffres 1" et non pas des " lettres l ".

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ l_1 & & & \\ 0 & l_{i-1} & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

1.1 : Montrer que les coefficients a_i, c_i, d_i, l_i sont liés par un ensemble de relations (R)

$$d_1 = a_1$$

$$(R) \quad \alpha \overset{\beta}{l_{i-1}} d_{i-1} + \gamma d_i = a_i \qquad 2 \le i \le n$$

$$\delta d_i l_i = c_i \qquad 1 \le i \le n-1$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes à déterminer.

1.2 :

1.2.1 - Montrer que (R) admet une solution si, pour tout i $1 \le i \le n$, $d_i \neq 0$

1.2.2 - Montrer que la décomposition $A = L D {}^tL$ existe et est unique si et seulement si, pour tout i $1 \le i \le n$ $\dfrac{\det A^{(i)}}{\det A^{(i-1)}} \neq 0$

1.3 : Dénombrer le nombre d'opérations nécessaires aux calculs de tous les coéfficients d_i et l_i (on distinguera les additions et soustractions d'une part, les multiplications et divisions d'autre part).

A SUIVRE

II

On se propose de résoudre un système linéaire (S) $AX = B$ où A est tridiagonale symétrique réelle d'ordre n, régulière et factorisable sous la forme $A = L D {}^tL$. (Méthode de Cholesky)

On pose $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_n \end{bmatrix}$

2.1 :

2.1.1 - Montrer que (S) s'écrit $LZ = B$ et exprimer Z en fonction de D, L et X.

avec $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_i \\ z_n \end{bmatrix}$

2.1.2 - Déterminer les relations liant les z_i, l_i et b_i et dénombrer le nombre d'opérations nécessaires aux calculs des z_i.

2.2 :

2.2.1 - Montrer que la résolution de (S) se ramène alors à celle du système (S_1) $DY = Z$ et exprimer Y en fonction de L et X

avec $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_i \\ y_n \end{bmatrix}$

2.2.2 - Déterminer les relations liant les y_i, z_i et d_i et dénombrer le nombre d'opérations nécessaires aux calculs des y_i.

2.3 :

2.3.1 - Montrer que la résolution de (S_1) se ramène à celle du système (S_2) ${}^tLX = Y$.

2.3.2 - Déterminer les relations liant les x_i, y_i et l_i et dénombrer le nombre d'opérations nécessaires aux calculs des x_i

2.4 : Dénombrer le nombre total d'opérations nécessaires à la résolution de (S) par la méthode de Cholesky.
Sachant que la résolution de (S) par la méthode de Gauss nécessite de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$ opérations, déterminer à partir de quelle valeur de n la méthode de Cholesky nécessite moins d'opérations que celle de Gauss.

III

On rappelle que cette partie est totalement indépendante des deux parties précédentes.

3.1 :

3.1.1 - On pose $P_0(\lambda) = 1$. Calculer $P_1(\lambda)$.

3.1.2 - Montrer que les polynomes P_k sont liés par une relation de récurrence de la forme :

$$P_k(\lambda) = f_k(\lambda) P_{k-1}(\lambda) + g_k P_{k-2}(\lambda) \quad 2 \le k \le n$$

Déterminer $f_k(\lambda)$ et g_k

3.2 :

3.2.1 - Montrer que les racines de P_k sont réelles.

3.2.2 - Montrer que le rang de $(A^{(k)} - \lambda I_k)$ est supérieur ou égal à $(k - 1)$ et déterminer la dimension du noyau de $(A^{(k)} - \lambda I_k)$

3.2.3 - En déduire que les racines de P_k sont simples.

3.3 :

3.3.1 - Montrer que les polynômes successifs P_k et P_{k-1} n'ont aucune racine commune.

3.3.2 - Soient $\alpha_1, \dots \alpha_j, \dots \alpha_k$ les racines de P_k
$\alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots < \alpha_k$

Montrer que les racines $\gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots \gamma_{k+1}$ de P_{k+1} sont telles que

$$\gamma_1 < \alpha_1 < \gamma_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{j-1} < \gamma_j < \alpha_j < \dots < \alpha_k < \gamma_{k+1}.$$

FIN